

化学概論第一 4月30日出題 略解

水素類似原子の周りを速度 v で等速円運動する電子を考える。電子の軌道運動の角速度を ω とすると、遠心力とクーロン引力のつり合いより

$$m_e \frac{v^2}{r} = m_e r \omega^2 = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

一方で電子の全エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 + \left(-\frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (2)$$

ボーアの量子条件より

$$\begin{aligned} L_\theta &= m_e r v \\ &= \frac{h}{2\pi} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)より $m_e v = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{n}{r}$ であり式(1)と組み合わせると、

$$v = \frac{Z^2 e^2}{2\epsilon_0 h n} \quad (4)$$

式(4)を式(3)に代入すると

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m_e Z^2 e^2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (5)$$

ここで式(3.3.9)は水素原子の場合を考えているので $Z=1$ 、またボーア半径 a_0 は式(5)で $n=1$ の時を考えているので

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (3.3.9)$$

式(3.3.9)に $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$, $m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$, $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ を代入すると

$$\text{(答) } a_0 \cong 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$$

水素原子の場合で考えるので $Z=1$ として式(5)を(2)式に代入すると、

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (7)$$

ここで E_n なるエネルギー状態から E_m なるエネルギー状態 ($m > n$) の遷移でのエネルギー差 ΔE はリュードベリの式を用いて

$$\Delta E = h\nu = E_n - E_m = \frac{hc_0}{\lambda} = hc_0 R_\infty \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (8)$$

式(8)において E_n のエネルギーは

$$E_n = - \frac{hc_0 R_\infty}{n^2} \quad (9)$$

式(7)、式(9)よりリュードベリ定数 R_∞ は

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8c_0 h^3 \varepsilon_0^2} \quad (3.3.11)$$

式(3.3.11)に $\varepsilon_0 = 8.854187 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$, $m_e = 9.109383 \times 10^{-31} \text{ kg}$,
 $h = 6.626070 \times 10^{-34} \text{ Js}$, $e = 1.602176 \times 10^{-19} \text{ C}$, $c_0 = 2.997924 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ を代入すると

$$\text{(答)} \quad R_\infty \cong \mathbf{1.09737 \times 10^7 \text{ m}^{-1}}$$