

#### 11・4 水素原子の問題：ある方向の角運動量成分

さて水素原子の問題を解くために量子力学の方法を用いよう。Schrödinger の方程式、すなわちエネルギー-演算子の方程式、を解くと固有関数とそれに対応する固有エネルギーが得られ、このエネルギーを原子のエネルギーと見なすのである。また角運動量演算子は求められた固有関数の角運動量としての意味を示してくれる。

核からの距離だけに依存する中心場で動く電子のハミルトニアンはつぎのように書ける。

$$\mathcal{H} = \left[ -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(r) \right] \quad (11 \cdot 29)$$

しかし系は本当は、系の重心のまわりを動く電子と核の二つの粒子からなっている。この場合の運動方程式は、3・1節に示したように、粒子の質量  $m$  の代わりに換算質量  $\mu$  を用いると定点のまわりを単一の粒子が動くのと同じになる。（ここでは  $\mu$  はほとんど電子の質量に等しい。しかし  $m$  を  $\mu$  で置きかえることは価値のあることである。というのは後ほど  $m$  は量子数として用いるので、ここでは除いておいた方がよいからである。）  $m$  の代わりに  $\mu$  を用い、それに上記のハミルトニアンを入れると、水素原子、または任意の中心場の系、に対する Schrödinger の方程式はつぎのようになる。

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 \mu} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + U(r) \psi = \epsilon \psi \quad (11 \cdot 30)$$

かなりの操作をすると、この式は極座標（図3・2）で表わすことができ、つぎのようになる。

$$-\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + U(r)\psi = \epsilon \psi \quad (11 \cdot 31)$$

ここで方程式を、変数  $r, \theta, \phi$  を別々に含む項に分離することを試みよう。つぎの形の関数を調べてみることにする。

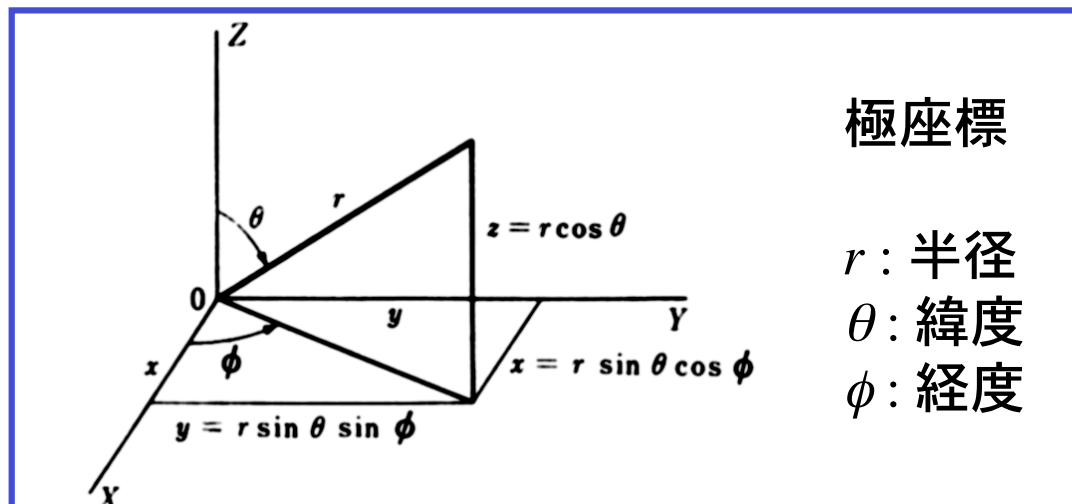
$$\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (11 \cdot 32)$$

この式を (11・31) 式に代入し、配列がえをするとつぎのようになる。

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{8\pi^2\mu r^2 \sin^2 \theta}{h^2} [\epsilon - U(r)] = 0 \quad (11 \cdot 33)$$

方程式のいくらか役に立つ分離がなされたことになる。特に第三項は変数  $\phi$  を含み、この変数はその他の項には現われない。したがってこの方程式がすべての  $\phi$  の値で成立するのは、第三項が一定になるときだけである。すなわち

$$\frac{d^2 \Phi / d\phi^2}{\Phi} = \text{const} \quad (11 \cdot 34)$$



とおくことができる。ここで  $\Phi$  として、二度微分すると、もとの関数に多分ある定数を掛けたものにもどるような関数を求めたいのである。それに適当な関数は

$$\Phi = A e^{im\phi} \quad (11 \cdot 35)$$

であって、この関数では

$$\frac{d\Phi}{d\phi} = imA e^{im\phi} \quad (11 \cdot 36)$$

および

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2 A e^{im\phi} = -m^2 \Phi \quad (11 \cdot 37)$$

になるからである。すなわち  $\Phi$  が (11・35) 式の形であれば、(11・34) 式の定数項は  $-m^2$  になる。

$m$  を求めるには、 $z$  軸のまわりに何回転しようとして  $\phi$  の特定な値において  $\Phi$  に同じ値をとってもらいたいことに気がつけばよい。たとえば

$$\Phi = A e^{im\phi} = A e^{im(\phi+2\pi)} = A e^{im\phi} e^{2m(i\pi)} \quad (11 \cdot 38)$$

であってもらいたいのである。すなわち  $(e^{i\pi})^{2m}$  と書ける  $e^{2m(i\pi)}$  が 1 でなくてはならない。  $e^{i\pi} = -1$  であることを思いだして頂ければ、上の条件が成立するのはつぎの場合に限られる。

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11 \cdot 39)$$

## 11・5 水素原子の問題：全角運動量

前節の  $\Phi$  の結果を用いると、(11・33) 式の第三項を  $-m^2$  で置きかえることができ、方程式はつぎのように書きかえられる。

$$-\frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 \mu r^2}{h^2} [\epsilon - U(r)] \quad (11 \cdot 41)$$

この式の右辺は  $\theta$  によって変化しない。また等号がすべての  $\theta$  の値に対して成立するのは、左辺もまた  $\theta$  によらない場合に限られる。すなわち  $\theta$  が変化しても両辺とも一定値をとることになるが、これを  $\beta$  としよう。そうすると  $\theta$  が満たさなくてはならない方程式は

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \theta + \beta \theta = 0 \quad (11 \cdot 42)$$

となる。この方程式の解は、対応する  $\theta$  の方程式 [(11・34) 式] の解ほど容易には求められない。解が求められるのは、 $\beta$  が  $l(l+1)$  に等しい場合だけである。ただし  $l$  は  $m$  より大きいか、または等しい正の整数である。この  $l$  と  $m$  の関係はつぎのように表わされるのが普通である。

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad (11 \cdot 43)$$

なおこの方程式の解のいくつかを表 11・2 に示す。

表 11・2 角関数  $\theta(\theta)$  の例

$l$	$m$	$\theta$
0(s 軌道)	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
1(p 軌道)	0	$\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta$
	$\pm 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$
2(d 軌道)	0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
	$\pm 1$	$\frac{\sqrt{15}}{2} \sin \theta \cos \theta$
	$\pm 2$	$\frac{\sqrt{15}}{4} \sin^2 \theta$

## 11・6 水素原子の問題：動径因子

最後に (11・33) 式を単一変数  $r$  だけを含む式にかえてしまったわけである。この単一の変数の式を求めるには (11・41) 式の右辺を  $\beta=l(l+1)$  に等しくおくとよい。このようにするとつぎの式が得られる。

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2\mu r^2}{h^2} [\epsilon - U(r)] = l(l+1) \quad (11 \cdot 45)$$

さらに進めるには、 $U(r)$  に関数を代入しなくてはならない。

いま特別に、一電子原子 H, または  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$  のような一電子イオンを考えることにしよう。この場合核電荷は  $+Ze$  ( $Z$  は原子またはイオンの原子番号),  $-e$  が電子の電荷である。電子が核から  $r$  の距離にあるときのポテンシャルエネルギーは  $-Ze^2/(4\pi\epsilon_0)r$  である。 $U(r)$  としてこの式を用いると、(11・45) 式から動径方程式はつぎのように書きかえられる。

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{8\pi^2\mu}{h^2} \left\{ \epsilon + \frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)r} \right\} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (11 \cdot 46)$$

ここでもこの導かれた方程式の解の関数は容易に得られないのである。(11・46) 式を満足することが証明されているいくつかの例を表 11・3 に示した。これらの動径関数のそれぞれは、量子数  $n$  [主量子数 (principal quantum number) とよばれる] の値によって規定される。(11・46) 式に解が存在するのは、 $n$  が  $l$  より少なくとも 1 大きい整数をとるときに限られる。この制限は通常つぎのように表わされる。

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (11 \cdot 47)$$

表 11・3  
動径関数  $R(r)$  の例

$n$	$l$	$R(r)$
1	0	$R_{1s} = 2 \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$
2	0	$R_{2s} = \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \left( 2 - \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-Zr/2a_0}$
	1	$R_{2p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0}$
3	0	$R_{3s} = \frac{2}{27} \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{3/2} \left( 27 - \frac{18Zr}{a_0} + \frac{2Z^2r^2}{a_0^2} \right) e^{-Zr/3a_0}$
	1	$R_{3p} = \frac{1}{81\sqrt{3}} \left( \frac{2Z}{a_0} \right)^{3/2} \left( 6 - \frac{Zr}{a_0} \right) \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/3a_0}$
	2	$R_{3d} = \frac{1}{81\sqrt{15}} \left( \frac{2Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{Z^2r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0}$

表 11・3 の解の関数を (11・46) 式に入れるとわかるように、エネルギー  $\epsilon$  がつぎのように表わされる。

$$\epsilon = - \frac{2\pi^2\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2 n^2} \quad n=1, 2, \dots \quad (11 \cdot 48)$$

この結果は、11・2節の Bohr の取扱いによって得られたものと同じである。したがって、Rydberg 式でまとめられたスペクトルの結果と一致する水素型原子の状態のエネルギーの式に到達したことになる。しかしこれを導いてきたとき、原子中の電子の挙動をずっと詳しく明確なものにしたのである。

波動関数の動径分布は主として量子数  $n$  によって支配される。波動関数の動径方向の広がりに影響を与える主な因子は、 $e^{-Zr/na_0}$  という形の指数関数の項である。形の詳細な点については  $l$  によることがわかるが、全体の広がりには  $n$  に関する。



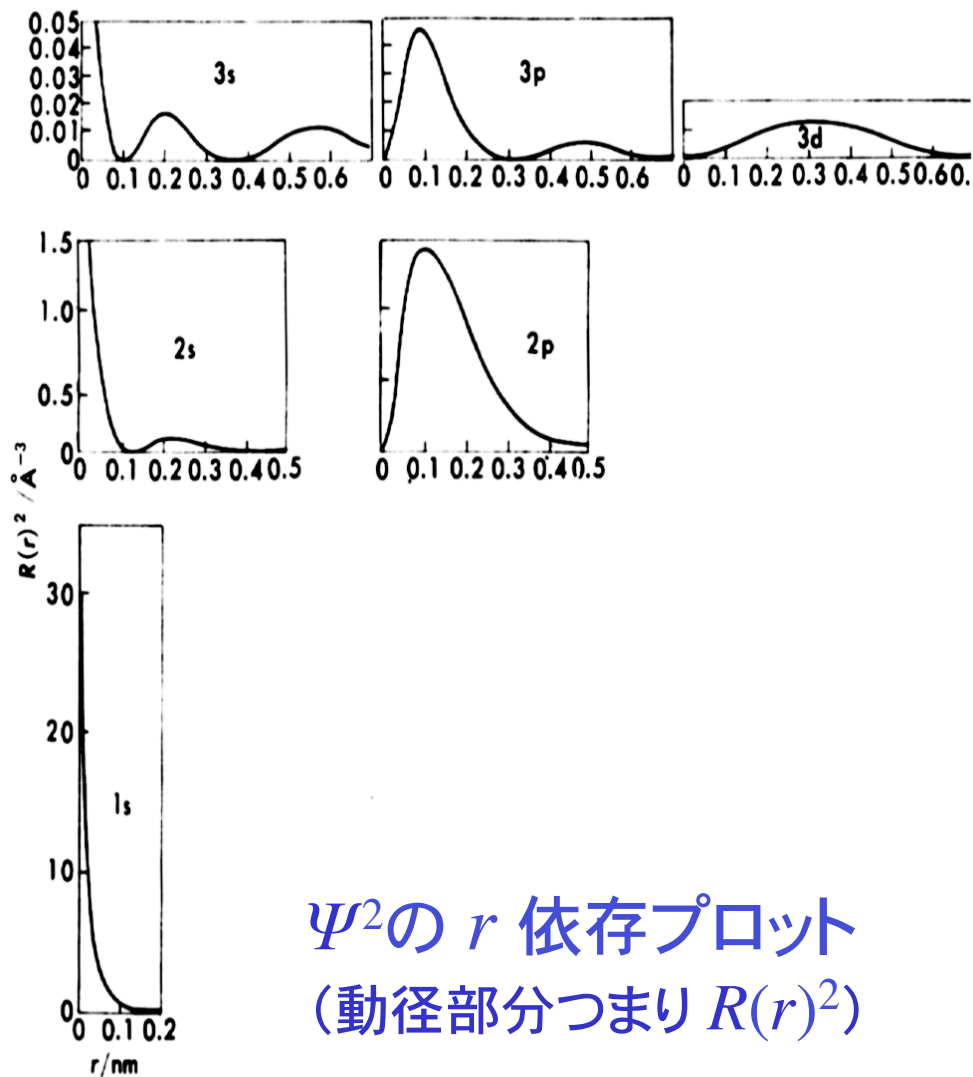


図11・5 水素原子の  $n=1, 2, 3$  の状態の波動関数の動径部分の二乗

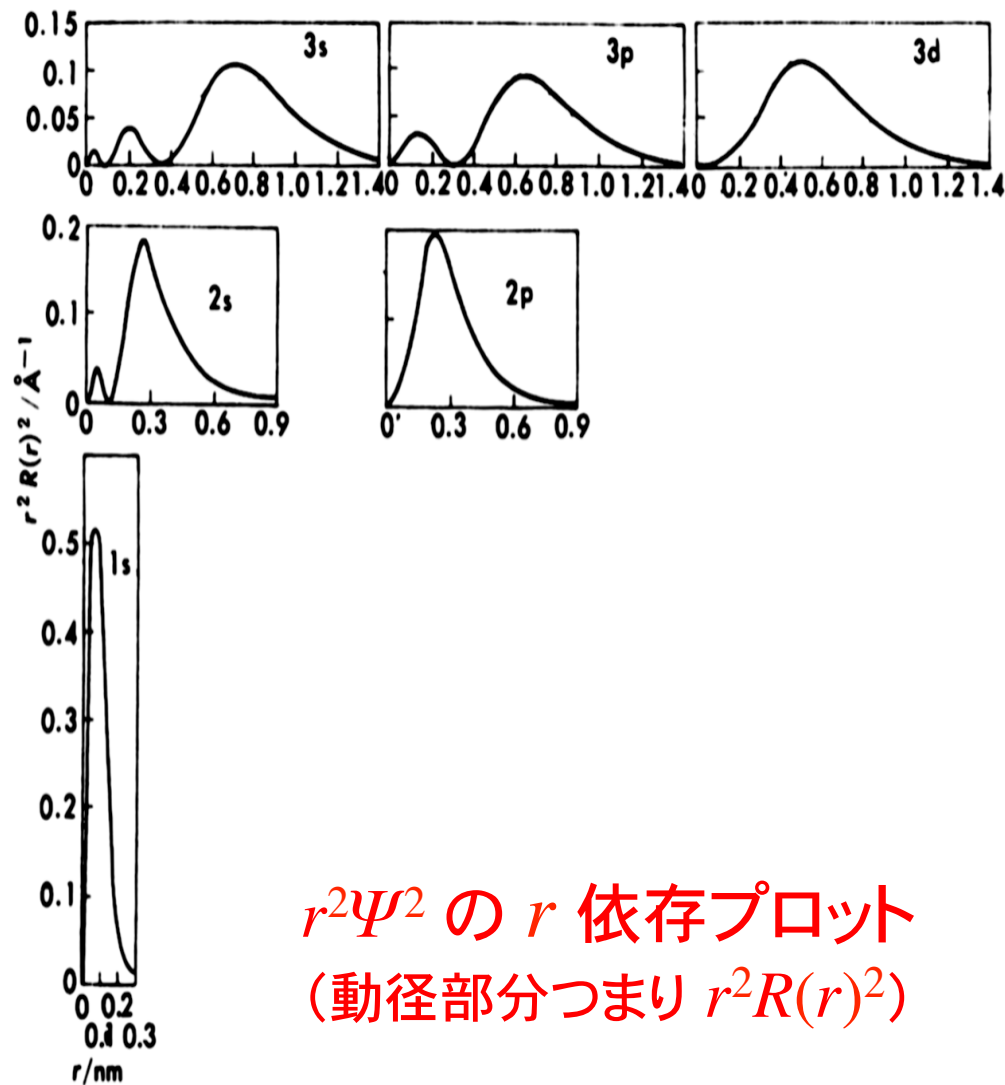


図11・6 水素原子軌道の動径分布関数  $r^2R^2(r)$

$n$  を大きくすると動径方向の節面が増える。



表 11・5 極座標と直交座標で表わした水素原子関数の角因子

$l$	$m$	複素関数	極座標	直交座標	記号	図
0	0	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	s	
1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{z}{r}$	$p_z$	
	+1	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\sin\theta\cos\phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{x}{r}$	$p_x$	
	-1	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\sin\theta\sin\phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{y}{r}$	$p_y$	
2	0	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2}$	$d_{z^2}$	
	+1	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\sin\theta\cos\theta\cos\phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\frac{xz}{r^2}$	$d_{xz}$	
	-1	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{-i\phi}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\sin\theta\cos\theta\sin\phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\frac{yz}{r^2}$	$d_{yz}$	
	+2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{2i\phi}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\sin^2\theta\cos 2\phi$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\frac{x^2 - y^2}{r^2}$	$d_{x^2-y^2}$	
	-2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{-2i\phi}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\sin^2\theta\sin 2\phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\frac{xy}{r^2}$	$d_{xy}$	

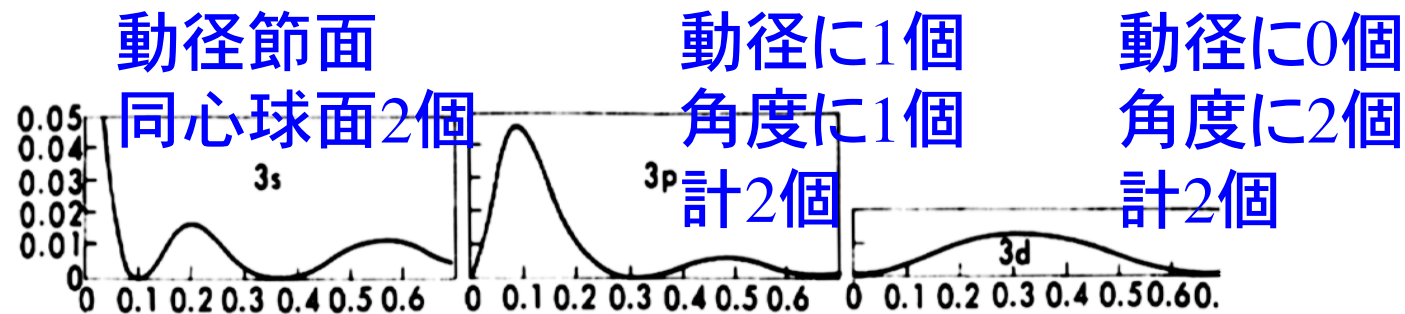
角度部分だけ  
つまり  $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

実数にして  
「見える」  
ようにしてある

$l$  の軌道関数には  
 $l$  枚の節面  
角度部分の節面が  
増える球面調和振動  
(スイカの等分問題、  
包丁  $l$  回入れる)

$n$  の軌道関数には  
総数  $n-1$  枚の節面  
(包丁  $n-1$  回入れる)



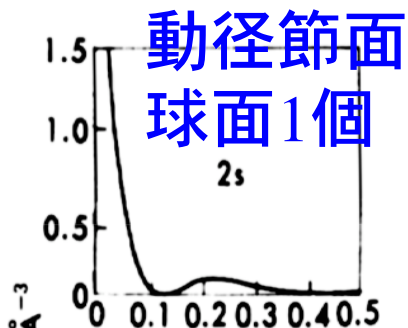


動径節面  
同心球面2個

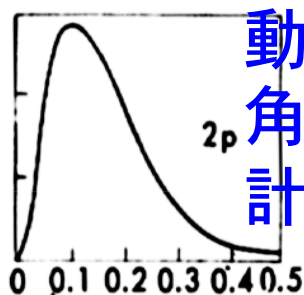
動径に1個  
角度に1個  
計2個

動径に0個  
角度に2個  
計2個

節の数(2個)が  
等しいから  
縮重



動径節面  
球面1個

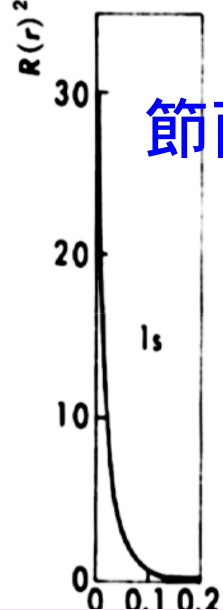


動径に0個  
角度に1個  
計1個

節の数(1個)が  
等しいから  
縮重

$l$  の軌道関数には  
 $l$  枚の節面

角度部分の節面が  
増える球面調和振動  
(スイカの等分問題、  
包丁  $l$  回入れる)



節面0個

節の数(0個)  
(縮重できない)

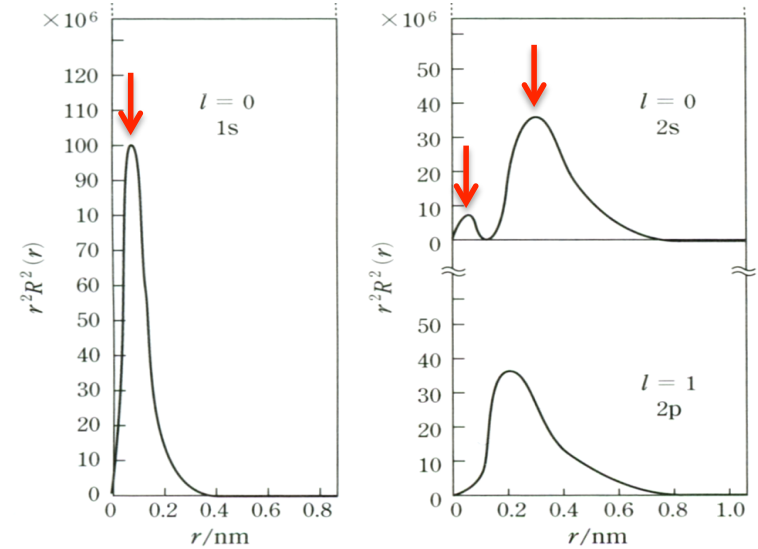
$n$  の軌道関数には  
総数  $n-1$  枚の節面  
(包丁  $n-1$  回入れる)

三次元的な、基準振動、倍振動、三倍振動、、、  
( $n=1$ )      ( $n=2$ )      ( $n=3$ )

宿題: 「例題 3.7(1s)」および、2s 軌道で同様の質問、 $a_0$  単位で。  
 ヒント: 動径分布関数  $4\pi r^2 \Phi^2$  が極値を持つ条件、導関数=0 の評価  
 なので  $4\pi$  と規格化因子は略すと楽。

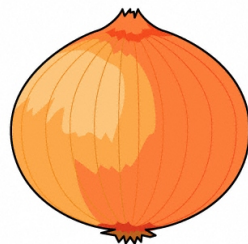
マーク部分だけ使おう

波 動 関 数	記 号
$\sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$	$\psi_{1s}$
$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$	$\psi_{2s}$

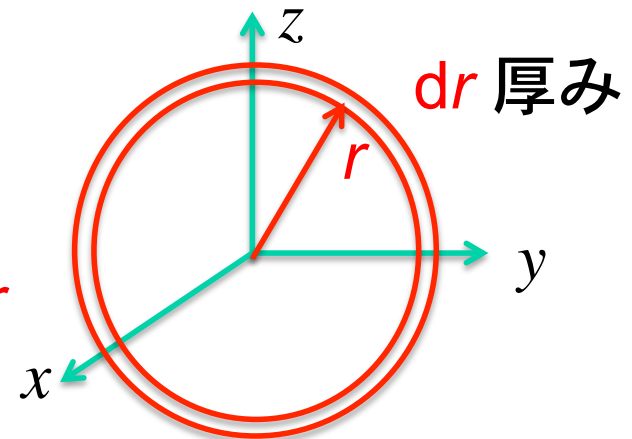


電子密度は  $\Phi^2$  で表される. 動径方向の積分について、微小球殻体積中の電子の存在確率が  $\Phi^2 dv = 4\pi r^2 \Phi^2 dr$ .

従って、動径分布関数は  $4\pi r^2 \Phi^2$ .

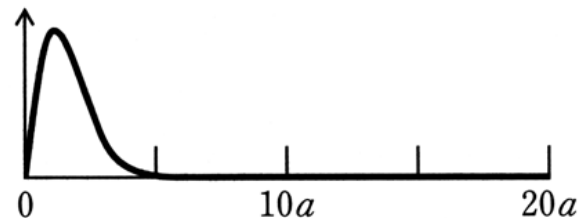


表面積  $4\pi r^2$   
 球殻体積  $4\pi r^2 dr$



# H26 国家公務員試験 化生薬 専門(多肢式)試験問題から

【No. 25】 図は水素原子の1s軌道の動径分布関数(動径確率密度関数)の概略を示したものである。水素原子の2p軌道の動径分布関数の概略として最も妥当なのはどれか。



ただし、横軸は動径であり、 $a$ はボーア半径を表し、縦軸は任意単位で表されている。

