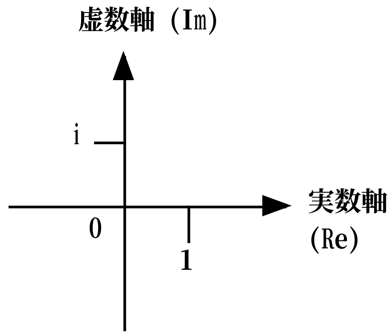
この資料は、学部１年次の小人数セミナー用に作られたものである。１の６乗根の求め方について参考とせよ。

【１】複素平面

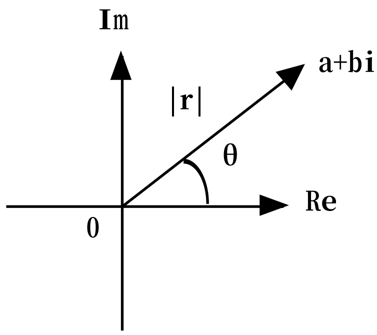
複素数 $r = a+bi$ を、位置ベクトル (a,b) に対応させる。複素数の和、差、及びスカラー倍は、位置ベクトルの計算法則に従う。
１、i はそれぞれ実数軸、虚数軸の単位ベクトルとなる。



例１）$(1+2i) + (2+i)$ を図示して答えよ。
例２）$3(\sqrt{3}/2+ i/2)$ を図示して答えよ。

r_1-r_2 を表す点は、ベクトル $\overrightarrow{r_2r_1}$ と等長で、かつこれと平行で同じ向きを持つように引いたベクトルの端の点である。（$r_1 +(-r_2)$ である。）

直交座標と極座標
二次元の座標を、直交座標で a（実数軸）と b（虚数軸）でも表せるが、極座標 $|r|$（動径の長さ; 絶対値）と θ（回転角; 偏角）でも表せる。r $(= a+bi)$ を表す点は、Re 軸から θ をなす半直線を引いて、その上に $|r|$ に等しい長さの線分をとった端の点である。θ は $-\pi$ から π との間にとることが多い。
θ および r を a, b で表現すると、
$\theta = \tan^{-1}(a/b)$, $|r| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$
$\theta = \arg(r)$ とも書く。
複素表示では、x^* を x に対する複素共役として、
$|r| = \sqrt{(x^*x)}$ とも書く。ノルムとも言う。
逆に、$a = |r|\cos\theta$, $b = |r|\sin\theta$.



例３）例１，２で得られた結果について $|r|$ と θ をそれぞれ求めよ。

【２】複素平面上の計算法則に慣れ親しむ

複素数の積は、極座標表現で易しくなる。→「r は積に、θ は和に」
Euler の式、$\exp(i\theta) \equiv \cos\theta+ i \sin\theta$、と定義して使うと、
$a_1 + b_1i = |r_1|(\cos\theta_1+ i \sin\theta_1) = |r_1|\exp(i\theta_1)$
$a_2 + b_2i = |r_2|(\cos\theta_2+ i \sin\theta_2) = |r_2|\exp(i\theta_2)$
$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (|r_1|\exp(i\theta_1))(|r_2|\exp(i\theta_2)) = |r_1 r_2|\exp(i(\theta_1+\theta_2))$

例４）$(1+ i)^2$ および $(-1+ i)^2$ を計算せよ。
例５）$i(3 + 2i)$, $i^2(3+ 2i)$, および $i^3(3+ 2i)$ の計算過程を複素平面に図示せよ。

$r = 1$ という特別な状況では、計算は大変に易しくなる。

例６）$1/2+\sqrt{3}/2\ i$ と $\sqrt{3}/2+i/2$ との積を求めよ。
例７）１の４乗根および５乗根を求めよ。掛け算によってクルクル廻ることを考えよ。

複素数の教科書には、つぎのようにまとめてある。

定理１　$|r_1 r_2| = |r_1||r_2|$, $\arg(r_1 r_2) = \arg(r_1) + \arg(r_2)$
定理２　$|r_1/r_2| = |r_1|/|r_2|$, $\arg(r_1/r_2) = \arg(r_1) - \arg(r_2)$
定理３　n が整数のとき、$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

【３】指数関数と三角関数の加法定理

$r_1 = \cos\theta_1+ i \sin\theta_1$ と $r_2 = \cos\theta_2+ i \sin\theta_2$ はそれぞれ単位長さをもつ $(r = 1)$。$r_1r_2 = \cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)$ を計算するときには、角度が和になることだけを考えればよい。

例８）r_1r_2 の実部と虚部の恒等関係から、sin, cos 関数の加法定理を示せ。

$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$, $\sin(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2$
一方、指数関数の加法定理はずっと易しく、$\exp(\theta_1+\theta_2) = \exp(\theta_1)\exp(\theta_2)$ である。もし三角関数を指数関数で書き換えられたら、計算が楽になる。

なお、実数の xy平面でも次のように導くことができる(が少々長くなる)。
2x2 変換行列 (一次変換行列)の作り方：
ベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$がそれぞれ$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$になる変換行列は $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$である。並べただけ。
なぜなら、単位ベクトルに対して、$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$を計算してみれば明らか。
角度θ の回転の変換行列は、$A(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$である。
$A(\theta_1+\theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ に対して、成分を書き並べてみれば、

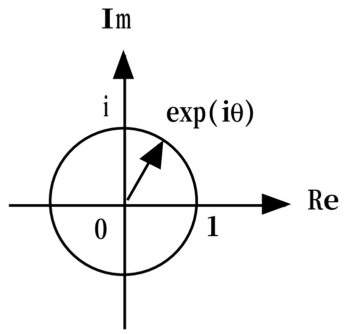
$$\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 & -(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)\\ \sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\end{pmatrix}$$

【マメ知識】ところで、一次変換という言葉は、複素関数の『一次関数』から来たものである。これは、a,b,c,d を複素数の定数、z が複素変数であるとき、新しい複素数 w を次の式により作る操作を言う。

$$w = \frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc \neq 0$$

【４】位相

位相の進み、遅れは交流回路や波動で登場する。
独立な２つの単位ベクトルの結合で、任意の平面の座標が表せるように、独立な２つの位相成分で、任意の位相の進みあるいは遅れを表現できる。独立な２つの位相成分には1 と i や cos と sin を選ぶと判りやすい。
sin に対して cos は 位相が90° だけ進んでいる。i が 1 より 90° 進んでいるといってもよかろう。たとえば 45° 進んでいる位相は、実部と虚部が 50/50 で混ざっているなどと表現できる [$\exp(i\cdot 45^\circ) = (1+i)/\sqrt{2}$]。
さらに、極座標表現によれば、どんな位相もたった一つのパラメータθ 表現できる。exp(iθ) という表現は、位相 θ をもつ単位ベクトルであり、複素平面の半径１の円周上の点の位置ベクトルである。← Euler 式
このような概念で利用される $e^{i\theta}$ という関数は、e のベキという意味とはだいぶかけ離れたものになるので、あえて exp(iθ) と表現する。



【５】授業「化学結合と構造」の中で

一次元波動方程式は、$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x) = -\dfrac{4\pi^2}{\lambda^2}f(x)$ である。

A sin(2πx/λ) や A cos(2πx/λ) は解の一つである（代入して確認せよ）。
cos 関数は sin 関数が 90° 進んだものである [cos(2πx/λ) = sin(2πx/λ+90°)] 。さらに、任意の角度だけ進んだ sin 関数 A sin(2πx/λ+C) もすべて解となる（代入して確認せよ）。Cは一種の積分定数であり、任意である。したがって一般解は、A exp(i•2πx/λ) である（代入して確認せよ）。exp 関数は、位相 2πx/λ をもつ単位ベクトルの方向を、A は長さを示す。
微分の線形性から、f(x) が解のとき、スカラー倍の Af(x) も解となり、長さ不定となる。たとえば長さを規定するために、「波動関数の二乗が電子の密度を表すから、全空間で積分したときにちょうど１にならなくてはならない」というような条件下で、A を定める。この操作を規格化という。長さ１となるような解を求めよ、ということと同等である。
虚数表現は単に表現における問題であり、虚数の物理量は存在しない。解はあくまでも「三角関数」であり、位相の自由度を入れるために指数関数の力を借りただけである。