

級数

【1】等比数列と級数の和の公式の導出

まず、
$$S_N = \sum_{k=0}^N x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

従って、
$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{1-x} \quad (\text{ただし } |x| < 1)$$

を導きなさい。

【2】確認する問題

- (a) $x = 0.1$ を代入して、無限級数の和を2通りに計算しなさい。
- (b) いま、100 m 隔てた2台の自転車がある。二人の少年 A 君と B 君が、速度 10 m/s でお互いの向きに走り出す(加速時間は無視してよい)。ちょうどそのとき1匹の蠅が速度 20 m/s で、A 君の自転車から飛び立って B 君の自転車に向かう。そして B 君の自転車にたどり着くと急激に方向を変えて、A 君の自転車に向かう。蠅は以下同様のことを繰り返す。では、A 君と B 君が正面衝突するまでに、蠅は何メートル飛んだことになるか？
- i) 蠅が B 君に到着する時間を t_1 を求めよ。 t_1 における A 君と B 君の位置、蠅が飛んだ距離を求めよ。
- ii) 次に蠅が A 君に到着する時間 t_2 を求めよ。帰納的に、 $t_3, t_4, \dots$ を求めよ。
- iii) 蠅が飛んだ距離を、無限級数の和として求めよ。
- iv) A 君と B 君とが正面衝突するまでの時間を求めて、以上の結果を吟味せよ。

【3】積分と積分定数を決める問題

等比級数の和の公式から、次の式を導きなさい。

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \dots$$

【4】複素数の対数の利用

前問の結果に $x = i$ を代入して、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

を示しなさい。ヒント： $\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} = e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$

それから、最初の10 ないし 20 項を2桁の精度で足し合わせてみなさい。

【5】Madelung 定数の問題

1 価の正イオンと1 価の負イオンが交互に並んでいて、隣接したイオン同士の距離はみな a である。単位電荷を Q として、特定のイオンが他のすべてのイオンによって得るクーロンポテンシャルエネルギーを求めよ。