基礎セミナー用の数学演習

1. 等比数列と級数の和の公式：公式の導出から始める。

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

従って、

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{1-x} \qquad (\text{ただし } |x|<1)$$

を導きなさい。

(a) 確認する問題：$x=0.1$ を代入して、無限級数の和の公式の両辺を独立に計算しなさい。

(b) 積分と積分定数を決める問題：等比級数の和の公式から次の式を導きなさい。

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \mp \cdots$$

(c) 発展問題：複素数の対数を利用する。筆算の練習。
前問の結果に $x=\imath$ を代入して

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \mp \cdots$$

を示しなさい。それから、最初の１０ないし２０項を２桁の精度で足し合わせてみなさい。
(ヒント：$\frac{1\pm\imath}{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\pm\imath\frac{\pi}{4}}$)

(d) Madelung 定数の問題：1 価の正イオンと 1 価の負イオンが交互に並んでいて、隣接したイオン同士の距離はみな a である。単位電荷を Q として、特定のイオンが他のすべてのイオンによって得るクーロンポテンシャルエネルギーを求める。

(e) 前 2 問においては $|x|<1$ が成り立っていないが、級数の和が収束するのはなぜか？
(ヒント：差を足し合わせたらどうなるだろう？)

(f) 漸化式と級数の和の公式：いま、100 m 隔てた 2 台の自転車がある。二人の少年 A 君と B 君が、速度 10 m/sec でお互いの向きに走り出す。(加速時間は無視してよい。)
ちょうどこのとき 1 匹の蝿が速度 20 m/sec で、A 君の自転車から飛び立って B 君の自転車に向かう。そして、B 君の自転車にたどり着くと急激に方向を変えて、A 君の自転車に向かう。蝿は以下同様のことを繰り返す。では、A 君と B 君が正面衝突するまでに蝿は何メートル飛んだことになるか？
最終結果を解釈しなさい。

2. ２項定理の問題、“法”、順列、確率、２進数などの単純な概念を応用する。

(a) ２項定理を用いて $11^{10}-1$ が 100 で割れることを示しなさい。

(b) $2222^{5555}+5555^{2222}$ が 7 で割れることを示しなさい。
(7 を法として考えなさい。)
(備考：3、7、11、23、101、5657 などで割り切れる。)

(c) ３つの違った金額が書かれた３枚のカードがテーブルの上に裏返しにおいてある。例えば、カード１には１０００円、カード２には５０００円、そしてカード３には１万円というように。ただし、プレーヤーにはどのような金額が書いてあるかはわからない。次のようなルールで勝負を決めるとする。プレーヤーはカードを引く。表の金額を見て、それが最高額だと思ったらそこでやめてクレームする。もしも、他のカードが最高額だと思うのなら、新しく１枚引いて、それが最高額だと思ったらそこでやめてクレームする。でなければ、最後の１枚をクレームする。クレームしたカードが実際に最高額ならプレーヤーの勝ちとする。さて、任意に引いた１枚のカードが最高額である確率は $\frac{1}{3}$ であるが、戦略によって勝つ確率を $\frac{1}{3}$ より大きくできるか？できるならその確率はいくらか？

(d) １０人の少女がいる。そのうち、６人は金髪で、５人は碧眼である。金髪碧眼の子は３人いる。では、金髪でも碧眼でもない少女は何人いるか？(図を描いて考えなさい。)
(この問題には人種的偏見はない。最近は金髪／碧眼の日本人を見かける。)

i. １、２、３の３つの数字でできた数の列を３元数列と呼ぼう。このとき、１、２の２つのどの数字も必ず一度は現われる r 桁の３元数列は何個あるか？前問にならって解きなさい。また、その個数が $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)^2$ の展開における $\dfrac{x^r}{r!}$ の係数に等しいことを確認しなさい。
(備考：微分したものがそれ自身に等しくなる関数を指数関数と呼び、e^x と書く。

$$\mathrm{e}^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

と級数展開されることを、項ごとに微分して確かめなさい。
また、実際に e^x が冪乗、すなわち $\mathrm{e}=\mathrm{e}^1$ の x 乗ならば $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{x+y}$ が成り立つはずである。この性質を級数展開から確認するには２項定理を用いて

$$\frac{(x+y)^n}{n!}=\sum_{r=0}^{n}\frac{x^r}{r!}\frac{y^{n-r}}{(n-r)!}$$

を示せばよいことがわかる。)

ii. １、２、３、４の４つの数字でできた４元数列を考える。このとき、１、２、３の３つのどの数字も必ず一度は現われる r 桁の４元数列は何個あるか？前問にならって解きなさい。また、その個数が $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)^3$ の展開における $\dfrac{x^r}{r!}$ の係数に等しいことを確認しなさい。

iii. １、２、３、４の４つの数字でできた４元数列のうちで、１と２が必ず二度は現われる r 桁の４元数列は何個あるか？また、その個数が $\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x-1-\frac{x}{1!})^2$ の展開における $\dfrac{x^r}{r!}$ の係数に等しいことを確認しなさい。

(e) １円玉が１０２３個ある。封筒を幾つか用意して、適切な金額の１円玉を各々の封筒に入れる。１円から１０２３円までの任意の金額を封筒の適切な組合せで作り出せるようにすると便利である。では、最低幾つの封筒が必要か？また、各々の封筒には何枚の１円玉を入れればよいか？

3. 不等式の問題：図と量との関係を読み取るなど。

(a) 凸関数から不等式を与える Jensen の定理：区間 (a,b) において $f''(x)>0$ のとき ($f(x)$ のグラフはどうなるか？)、$a<x_i<b$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ならば、$\alpha_i>0$、$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ に対して、

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

が成り立つ。等号はすべての x_i が等しいとき。
典型的な凸関数のグラフを描いて、$n=2$ の時この定理が成り立つことを図から読み取りなさい。
(この定理は熱力学的関数の性質に関わっている。)

(b) 代数平均と幾何平均と調和平均との間に成り立つ次の不等式を一般の n の値に対して示しなさい。

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\le\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

(ヒント：$f(x)=-\ln x$ が凸関数であることを図示して確かめなさい。次に微分して確かめなさい。
$n=2$ のときは

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$$

)

(c) ある世界では速さ v_1 と v_2 を足すとそれを合成した速さ v_3 が

$$v_3=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$$

で与えられる。ただし、c は速度の次元を持つ定数。例えば、速さ v_1 の電車の中である乗客が進行方向に速さ v_2 で歩くと、駅員にはその乗客が v_3 という合成された速さで動くように見える。さて、$0<v_1<c$、$0<v_2<c$ ならば $0<v_3<c$ であることを示しなさい。
(備考：実は我々の世界。)