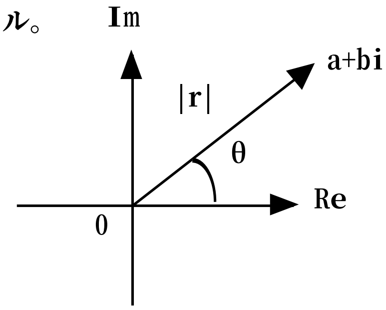
複素平面

複素数 $r = a+bi$ を、位置ベクトル (a,b) に対応させる。複素数の和、差、及びスカラー倍は、ベクトルの計算法則に従う。1、i はそれぞれ実数軸、虚数軸の単位ベクトル。



例えば、$r_1 - r_2$ を表す点は、ベクトル r_2r_1 と等長で、かつこれと平行で同じ向きを持つように引いたベクトルの端の点である[$r_1 +(- r_2)$ である]。

複素数の「長さ」$|r|$が定義され、ベクトルの方式に従う。

直交座標と極座標

二次元の座標を、直交座標で a（実数軸)と b（虚数軸）でも表せるが、極座標$|r|$（動径の長さ; 絶対値)と θ（回転角; 偏角）でも表せる。$r\ (= a+bi\ )$ を表す点は、Re 軸から θ をなす半直線を引いて、その上に $|r|$ に等しい長さの線分をとった端の点である。 θ は $-\pi$ から π との間にとることが多い。

θ および r を a, b で表現すると、

$$\theta = \tan^{-1}(b/a),\quad |r| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

複素表示では、r^* を r に対する複素共役 $(= a - bi\ )$として、$|r| = \sqrt{(r^*r)}$ とも書く。また、逆に、

$$a = |r|\cos\theta,\quad b = |r|\sin\theta\ .$$

問１）$3(\sqrt{3}/2+ i/2)$ について $|r|$ と θ をそれぞれ求めよ。

【複素平面上の計算法則に慣れ親しむ】

複素数の積は、極座標表現で易しくなる。→「 r は積に、 θは和に」

問２）$(1+ i\ )^2$ および $(-1+ i\ )^2$ を計算し、複素平面に図示せよ。

問３）$i(3 + 2i\ )$, $i^2(3+ 2i\ )$, および $i^3(3+ 2i\ )$ を計算し、複素平面に図示せよ。

【指数関数と三角関数の加法定理】

加法定理：$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$, $\sin(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2$

を使って、次の２行目の式を導くことができる（問４：これを導け)。

$a_1 + b_1i = |r_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ 、$a_2 + b_2i = |r_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき

$$(a_1 + b_1i\ )(a_2 + b_2i) = |r_1r_2|\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

問５）複素平面上で、問２，３を「幾何学的に」解いてみよ。

指数関数の計算法則は、$\exp(\theta_1+\theta_2) = \exp\theta_1\exp\theta_2$ である。そこで、$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ （Euler の式）と定義して、

$a_1 + b_1i = |r_1|\exp\theta_1$、$a_2 + b_2i = |r_2|\exp\theta_2$ のとき

$$(a_1 + b_1i\ )(a_2 + b_2i) = |r_1r_2|\exp(\theta_1+\theta_2)$$

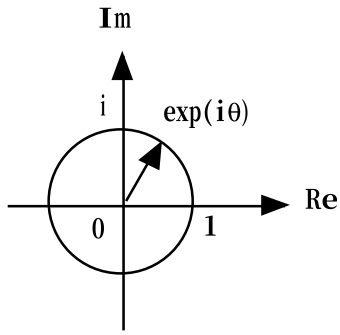
|r| ＝ 1 (単位ベクトル) という特別な状況では、計算は大変に易しくなる。例えば、n が整数のとき、$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ である（指数関数表現すれば自明）。

exp(iθ) は、位相角 θ をもつ単位ベクトルである。言い換えると、複素平面の半径１の円周上の点の位置ベクトル（方向ベクトル）である。これが Euler の式の幾何学的意味である。

exp(iθ) は複素平面で表現されるので、$e^{i\theta}$ とは書かない方が判りやすい（実は同一だとしても）。

例 6）$1/2 + i\cdot\sqrt{3}/2$ と $\sqrt{3}/2 + i/2$ との積を求めよ。

例 7）１の４乗根および５乗根を求めよ。掛け算によってクルクル廻ることを考えよ。



【位相】

位相の進み/遅れは交流回路や波動関数で登場する。

独立な２つの単位ベクトルの結合で、任意の平面の座標が表せるように、独立な２つの位相成分で、任意の位相を表現できる。独立な２つの位相成分には１ と i を選ぶ。

sin に対して cos は 位相が 90° だけ進んでいる。i が 1 より 90° 進んでいるといってもよかろう。たとえば位相 45°は、実部と虚部が 50/50 で混ざっているなどと表現できる、つまり $\exp(i\pi/4) = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$。

極座標表現によれば、好きな位相を一つの角度パラメータθ で表現できる。sin と cos を２つ書くのと exp を一つ書くのと、どっちが楽か、三角関数と指数関数とで、加法法則はどっちが易しいか。

【授業「化学構造論」の中で】

一次元波動方程式は、$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x) = -\dfrac{4\pi^2}{\lambda^2}f(x)$ である（ポテンシャルをゼロとしたら）。

A sin(2πx/λ) や A cos(2πx/λ) は解の一つである（問８：代入して確認せよ）。実は任意の角度を進めても、 A sin(2πx/λ+C) （もしくは cos ） はすべて解となる（問９：代入して確認せよ）。 しかし、sin だけや cos だけでは解の全てを表現できない。一次元ベクトルだけでは二次元を表現できないのと同様である。そこで、一般解を A exp(i•2πx/λ) と書けば、二次元面内の解すべてを表すことができる（問１０：方程式に代入して確認せよ）。 exp 関数部分は位相角 2πx/λ の方向ベクトルを、A は長さを示す。

虚数表現は単に表現における問題であり、虚数の物理量は存在しない。解はあくまでも「三角関数」であり、位相の自由度を表現するために指数関数の力を借りただけである。

微分の線形性から、f(x) が解のとき、スカラー倍の Af(x) も解となり、長さ不定（解は無数）となる。そこで、「波動関数の二乗が電子の密度を表すから、全空間で積分したときにちょうど１にならなくてはならない」というような条件下で A を定める。この操作を規格化という。長さ１となる（単位）ベクトルを定めよ、ということと等しい。