

級数

【等比数列と級数の和の公式の導出】

まず、
$$S_N = \sum_{k=0}^N x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}, \quad (\text{式1})$$

従って、
$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{1-x} \quad (\text{ただし } |x| < 1) \quad (\text{式2})$$

を導きなさい。 $S_{N+1} = S_N + x^{N+1}$ であるが、 $S_{N+1} = x^0 + xS_N$ でもある(ばらせば判る)。

【確認する問題】

- (a) $x = 0.1$ を代入して、無限級数の和を、式2を使わない/使うの2通りで計算しなさい。
- (b) いま、100 m 隔てた2台の自転車がある。二人の少年 A 君と B 君が、速度 10 m/s でお互いの向きに走り出す(加速時間は無視してよい)。ちょうどそのとき1匹の蠅が速度 20 m/s で、A 君の自転車から飛び立って B 君の自転車に向かう。そして B 君の自転車にたどり着くと急激に方向を変えて、A 君の自転車に向かう。蠅は以下同様のことを繰り返す。では、A 君と B 君が正面衝突するまでに、蠅は何メートル飛んだことになるか？
- i) 蠅が B 君に到着する時間を t_1 を求めよ。 t_1 における A 君と B 君の位置、蠅が飛んだ距離を求めよ。
- ii) 次に蠅が B 君を出発してから A 君に到着する時間 t_2 を求めよ。帰納的に、 t_3, t_4, \dots を求めよ。
- iii) 蠅が飛んだ距離を、無限級数の和として求めよ。
- iv) A 君と B 君とが正面衝突するまでの時間を求めて、以上の結果を吟味せよ。

【積分と積分定数を決める問題】

等比級数の和の公式(式2)の両辺を積分しなさい。つぎにそこに含まれるであろう積分定数 C を、 x に適当な値を試すことにより定めなさい。最後に式3、続いて式4へ導きなさい。

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots \quad (\text{式3})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \dots \quad (\text{式4})$$

【複素数の対数の利用】

前問の結果に $x = i$ を代入して、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots \quad (\text{式5})$$

を示しなさい。

ヒント： $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ の両辺の対数を取り、 $\ln(1+i) = i\pi/4 + 1/2 \cdot \ln 2$ である。ここで $\ln 2$ の取扱いについて、式4の $x=1$ のケースとなるが、ちゃんと以下の式の左辺は収束するのでご安心下さい。

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 \pm \dots = \ln 2 \quad (\text{式6})$$

【ためにしに...】

前問の $\pi/4$ を求めるために、最初の 10 ないし 20 項を 2桁の精度で足し合わせてみなさい。

【Madelung 定数の問題】

一次元モデル：1価の正イオンと1価の負イオンが交互に並んでいて、隣接したイオン同士の距離はみな a である。単位電荷を e として、特定のイオンが他のすべてのイオンによって得るクーロンポテンシャルエネルギーを求めよ。式6を使え。

三次元モデル：岩塩型結晶で、隣接したイオン間距離を a とする。第二近接は、距離 $2a$ でなく正方形対角線の距離にある。第三近接は、立方体対角線の距離にある。クーロン力は比較的遠隔で働く力なので、かなり多数の項の和を取らないといけない。第五項までの和を書いてみよ。

このエネルギーは化学的にはイオン結晶の格子エネルギーに相当し、これを次式であらわすとき、 M を Madelung 定数と呼ぶ。

$$U = -\frac{M}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ' e^2}{r} \quad (\text{式7})$$

U が負値をとるならば、問題にしているイオンがその場所に安定に存在できることを意味する。岩塩型結晶では、 x 軸上だけ着目するならば $M = 2\ln 2$ となる。 $x = y$ の直線上では同符号イオンだけとなるから、級数は発散してしまう。

岩塩型結晶で正しく三次元的に評価すれば、 $M = 6 - 12/2 + 8/3 - 6/2 + 24/5 - \dots$ である。この無限級数の和は幸いにして収束する (1.74756...)。